数理解析研究所講究録
368巻 1979年 53-69

アフィン対称空間上の正則表現に現われる離散スペクトル

広島大学 理学部 松本修一

はじめに

等質空間G/Hがアフィン対称空間であるとは，Gのinvolutive automorphism σがあって，$G_\sigma = \{ g \in G ; \sigma(g) = g \}$とおく時，$(G_\sigma)_0 \subset H \subset G_\sigma$がみたされる場合を云う．

〈例，1〉 GをLie群として，$G \times G$のinvolutive automorphism σを $\sigma : G \times G \ni (x, y) \longmapsto (y, x) \in G \times G$ により定義し，$\Delta G = \{ (x, x) \in G \times G ; x \in G \}$ とおくと，$(G \times G)_\sigma = \Delta G$である．よって$G \times G / \Delta G$は一つのアフィン対称空間である．一方 $G \times G / \Delta G \ni (x, y) \Delta G \longmapsto x \cdot y^{-1} \in G$ により $G \times G / \Delta G$はGと同一視される．よって，G自身がアフィン対称空間とみれる．

〈例，2〉 Gを半単純Lie群，σをGのあるCartan involution，Kをσによる固定点の全体とすると G/Kはアフィン対称空間である．すなわち Riemannian symmetric space はアフィン対称空間である．

〈例，3〉 $x, y \in \mathbb{R}^{p+q}$に対して，$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \cdots - x_{p+q} y_{p+q}$ とおき $H_{p,q} = \{ x \in \mathbb{R}^{p+q} \, ; \, \langle x, x \rangle = 1 \}$ とおく，この時 $G = SO(p, q)$ は $H_{p,q}$に推移的に作用し，点 ${}^t(1, 0 \cdots 0)$における isotropy は

$$H = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & SO(p-1, q) \end{array} \right) \right\}$$

である．一方 Gの automorphism σ を

$$\sigma \, ; \, G \ni g \longmapsto \begin{pmatrix} \overbrace{-1 \; 1 \; \ddots \; 1}^{p} & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix} {}^t g^{-1} \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix} \in G$$

により定めると， $G_\sigma = H$ である．よって $H_{p,q}$はアフィン対称空間である．

以下において，われわれの扱うアフィン対称空間 G/H に対しては，Gが連結な半単純Lie群であるとする．この

場合 Hは reductive であり、よって G/H 上には G-不変な測度が定数倍をのぞいて一意的にきまる．したがって $L^2(G/H)$ 上の左からの正則表現を τ とかくならば、G のユニタリ表現 $(\tau, L^2(G/H))$ を得る．

又，G の既約表現 $(\pi, \mathcal{H})$ が、$L^2(G/H)$ の点スペクトルであるとは，$(\pi, \mathcal{H})$ が $(\tau, L^2(G/H))$ の closed invariant subspace として実現される時を云う．

われわれが現在目標としていることは，$L^2(G/H)$ の点スペクトルを、すべて，しかも幾何的に、構成しようということである． $L^2(G \times G/\Delta G)$，すなわち $L^2(G)$ の点スペクトルの構成は，G が compact 群の場合は Borel - Weil - Bott の理論により，又 G が non-compact の場合には，Harish-chandra 氏をはじめとした多くの数学者により成されており，非常に興味深い理論である． 又一方，上に述べたところの〈例 3〉の場合に対しても，数名の人々がこの問題を解いている．(References, [1]〜[12])，これらの論文の中には、非常にほがらかな事実が散見され、この問題を一般的な形で解決することの重要性が感じられる．この問題は discrete series

の理論の単なる拡張ではなく，この問題の解決は，表現論における何らかの本質的進歩を与えるであろうと確信している．

§1においては，$\mathcal{H}_{2,q}$について成立している一つの事実を示す．§2においては，Flensted-Jensenの最近の仕事を示す．§3においては筆者の結果を述べる．証明は省略するので[13]を参照されたい．

§1．$SO_0(2,q)/SO_0(1,q)$について．

$$G=SO_0(2,q)\ ,\quad H=\left\{\begin{pmatrix}1 & \\ & h\end{pmatrix}\ ;\ h\in SO_0(1,q)\right\}$$

とする．$G/H\cong\mathcal{H}_{2,q}$である．$\mathfrak{g}$を$G$のLie algebraとし，$X,Y\in\mathfrak{g}$に対して $B_1(X,Y)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(XY)$ とおき，B_1より得られるCasimir operatorをΩ_1とかくと，$L^2(G/H)$の点スペクトルは

$$\mathcal{H}_l=\{f\in L^2(G/H)\ ;\ \Omega_1 f=l(l-q)f\}$$
$$\left(l\in\mathbb{Z},\ l>\frac{q}{2}\right)$$

により尽くされる．([8])．このセクションの目的は，この$\mathcal{H}_l$を，あるholomorphic line bundleのholomorphic L^2-sectionの空間として実現することにある．

$$C=\{x\in\mathbb{R}^{2+q}\ ;\ \langle x,x\rangle=0\}$$

$o_1 = {}^t(1,0,\cdots,0,1) \in C$, $\quad C_+ = G\cdot o_1$

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} & & t \\ & 0 & \\ t & & \end{pmatrix} ;\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$a_t = \exp\begin{pmatrix} & & t \\ & 0 & \\ t & & \end{pmatrix} , \quad A = \{ a_t ;\ t \in \mathbb{R} \}$$

$$M = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline & m & \\ \hline & & 1 \end{array}\right) ;\ m \in SO_0(1,q-1) \right\}$$

とおき, $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ を

$$\lambda ;\ \mathfrak{a} \ni \begin{pmatrix} & & t \\ & 0 & \\ t & & \end{pmatrix} \longmapsto t \in \mathbb{R}$$

により定めると

$$\mathfrak{g}_\lambda = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} & -\xi_1,\xi_2 \cdots \xi_q & \\ \hline \xi & & -\xi \\ \hline & -\xi_1,\xi_2 \cdots \xi_q & \end{array}\right) ;\ \xi \in \mathbb{R}^q \right\}$$

である. N_+ を $\mathfrak{g}_\lambda$ を Lie algebra とする analytic subgroup とすると,

$$C_+ \cong G/MN_+$$

である.

$l \in \mathbb{Z}$, $l > \frac{q}{2}$ に対して

$$C^\infty(G,l) = \{ \varphi ;\ G \to \mathbb{C} \quad C^\infty \\ \varphi(gma_tn) = e^{-lt}\varphi(g) \\ m \in M,\ n \in N_+ \}$$

とおくと

$$C^\infty(G, l) = \{ \varphi ; C_+ \to \mathbb{C} \quad C^\infty$$
$$\varphi(rx) = r^{-l}\varphi(x) \quad \forall r > 0 \}$$
$$= \{ \varphi ; S^1 \times S^{q-1} \to \mathbb{C} \quad C^\infty \quad \}$$

一方 H^p_m により, $\mathbb{R}^p$ 上の m 次同次調和多項式の空間をあらわす.

この時

$\mathring{\mathcal{H}}_l = \{ \varphi \in C^\infty(G, l) ;$

φ を $S^1 \times S^{q-1}$ 上の函数とみる時, $\varphi(x)$ は

$Y_m(x_1, x_2) Y_n(x_3, \cdots x_{2+q})$ の一次結合でかける.

但し, $Y_m \in H^2_m$, $Y_n \in H^q_n$, $n \geq 0$

$m - n \geq l$, $m + n \equiv l \ (\mathrm{mod}. 2) \}$

とおくと, $\mathring{\mathcal{H}}_l$ には内積が定義出来て, これによって $\mathring{\mathcal{H}}_l$ を完備化すれば $\mathcal{H}_l$ を得る. これは Strichartz [8] の仕事である.

さて $\xi^b_l ; MAN_+ \ni m a_t n \mapsto e^{lt}$ とおき $L^b_l = G \times_{\xi^b_l} \mathbb{C}$ とおくと $\Gamma^\infty(L^b_l) \cong C^\infty(G, l)$ である. よって $\mathring{\mathcal{H}}_l$ は $\Gamma^\infty(L^b_l)$ の subspace とみれる.

次に

$$C_{\mathbb{C}} = \{ [z] \in P^{1+q}(\mathbb{C}) ; \langle z, z \rangle = 0 \}$$

とおくと

対応；$G/MAN_+ \ni gMAN_+ \mapsto g[O_1] \in C_{\mathbb{C}}$

により，　$G/MAN_+ \hookrightarrow C_{\mathbb{C}}$，　又 $O_2 = {}^t(1, -1, 0 \cdots 0)$

とおくと，$[O_2] \in C_{\mathbb{C}}$ であって，$G\cdot[O_2]$ は $C_{\mathbb{C}}$ 内で

open complex submanifold で．$G\cdot[O_1]$ は $G\cdot[O_2]$

の境界に含まれる．更に

$$\dim_{\mathbb{R}} G\cdot[O_1] = \dim_{\mathbb{C}} G\cdot[O_2] = g$$

が成立する．

今 $\mathfrak{h} = \{ X \in \mathfrak{g} \,;\, \sigma X = X \} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & * \end{array}\right) \in \mathfrak{g} \right\}$

$\mathfrak{q} = \{ X \in \mathfrak{g} \,;\, \sigma X = -X \} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline \times & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{g} \right\}$

とおくと $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ であり，$\mathfrak{h}$ は H の Lie algebra である．

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}} = \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} & -\theta & \\ \theta & & \\ \hline & & 0 \end{array}\right) \,;\, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

とおくと，$\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}$ は $\mathfrak{q}$ の maximal abelian subalgebra であり．更に $\mathfrak{k}$ にも含まれている．

$$M_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}} = \{ h \in H \,;\, \mathrm{Ad}(h)|_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}} = I \}$$
$$= \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & m \end{array}\right) \,;\, m \in SO(g) \right\}$$

$$A_{\mathfrak{q}} = \left\{ \exp\left(\begin{array}{cc|c} & -\theta & \\ \theta & & \\ \hline & & 0 \end{array}\right) \,;\, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\widetilde{A}_{\mathfrak{a}} = \{\, g \in G \,;\ \ \mathrm{Ad}(g)|_{\mathfrak{a}} = I \,\}$$

とおくと

$\widetilde{A}_{\mathfrak{a}} = M_{\mathfrak{a}} A_{\mathfrak{a}}$ と $G\cdot[O_2] \cong G/\widetilde{A}_{\mathfrak{a}}$ が成立する.

特に $G/\widetilde{A}_{\mathfrak{a}}$ は complex manifold である

次に $\xi_\ell \,;\ \widetilde{A}_{\mathfrak{a}} = M_{\mathfrak{a}} A_{\mathfrak{a}} \ni m\cdot \exp\left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} & -\theta \\ \theta & \end{smallmatrix} & \\ \hline & 0 \end{array}\right)$

$$\longmapsto e^{i\ell\theta}$$

$$L_\ell = G \underset{\xi_\ell}{\times} \mathbb{C}$$

とおくと. L_ℓ は $G/\widetilde{A}_{\mathfrak{a}}$ 上の line bundle である.

$$G^{\mathbb{C}} = \{\, g \in SL(2+8, \mathbb{C}) \,;$$

$$ {}^t g \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \,\}$$

$$\alpha \,;\ \mathfrak{a}^{\mathbb{C}} \ni \left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} & -\zeta \\ \zeta & \end{smallmatrix} & \\ \hline & 0 \end{array}\right) \longmapsto -i\zeta \in \mathbb{C}$$

$\Phi \,;\ (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}^{\mathbb{C}})$ に関する root system

とおくと, $\Phi = \{\pm\alpha\}$ であり

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{-\alpha} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} & \begin{smallmatrix} {}^t z \\ -i\,{}^t z \end{smallmatrix} \\ \hline z,\, -iz & \end{array}\right) \,;\ \ z \in \mathbb{C}^8 \right\}$$

である. $\overline{N}$ を $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{-\alpha}$ を Lie alg とする $G^{\mathbb{C}}$ の analytic subgroup, $B = M_{\mathfrak{a}}^{\mathbb{C}} A_{\mathfrak{a}}^{\mathbb{C}} \overline{N}$ とおくと

$$\{\, g \in G^{\mathbb{C}} \,;\ \ g\cdot[O_2] = [O_2] \,\} = B,$$

よって　$G^{\mathbb{C}}/B \cong C_{\mathbb{C}}$ である．更に

$\xi_\ell^{\mathbb{C}}$; $B = M_{\sigma_0}^{\mathbb{C}} A_{\sigma_0}^{\mathbb{C}} \overline{N} \ni m \cdot \exp\left(\begin{array}{cc|c} & -\zeta & \\ \zeta & & \\ \hline & & 0 \end{array}\right) \overline{n} \mapsto e^{i\ell\zeta} \in \mathbb{C}$

$L_\ell^{\mathbb{C}} = G \underset{\xi_\ell^{\mathbb{C}}}{\times} \mathbb{C}$

とおくと　$L_\ell^{\mathbb{C}}\big|_{G/\widetilde{A}_{\sigma_0}} = L_\ell \quad L_\ell^{\mathbb{C}}\big|_{G/MAN_+} = L_\ell^b$　が成立する．したがって次の図式を得る．

$$\begin{array}{ccccc} L_\ell^b & \hookrightarrow & L_\ell^{\mathbb{C}} & \hookleftarrow & L_\ell \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ G/MAN_+ & \hookrightarrow & G^{\mathbb{C}}/B & \hookleftarrow & G/\widetilde{A}_{\sigma_0} \\ & & & \uparrow \text{open} & \end{array}$$

特に L_ℓ は holomorphic line bundle である．

よって，$\Gamma_2(L_\ell) = \{ f$; L_ℓ の holomorphic L^2-sec $\}$

とおけば，ここに G のユニタリ表現 $(\pi_\ell, \Gamma_2(L_\ell))$

を得る．但し，$\pi_\ell(g) f(x) = f(g^{-1}x)$ とする．

次の命題が成立する．

Proposition 1,　$\varphi \in \Gamma^\infty(L_\ell^b)$ に対して

$\varphi \in \mathring{H}_\ell \Rightarrow \exists U$; open in $G^{\mathbb{C}}/B$

$\exists \varphi^{\mathbb{C}} \in \Gamma_{hol}(L_\ell^{\mathbb{C}}, U)$

s.t.　∘ $U \supset G/MAN_+$

∘ $U \supset G/\widetilde{A}_{\sigma_0}$

∘ $\varphi^{\mathbb{C}}\big|_{G/MAN_+} = \varphi$

更にこの"解析接続"は $\dim_{\mathbb{R}} G/MAN_+ = \dim_{\mathbb{C}} G/\hat{A}_q$ により一意的である.

Proposition 2,

- $l \geq g \Rightarrow \begin{cases} T_2(L_l) \neq 0 \\ \hat{\pi}_l \text{ は既約} \end{cases}$
- $\frac{g}{2} < l < g \Rightarrow T_2(L_l) = 0$
- $l \geq g \Rightarrow \varphi^{\mathbb{C}}|_{G/\hat{A}_q} \in T_2(L_l), \quad \forall \varphi \in \mathring{H}_l$

Proposition 3,

$\mathring{H}_l \ni \varphi \mapsto \varphi^{\mathbb{C}}|_{G/\hat{A}_q} \in T_2(L_l)_K$

により, H_l と $T_2(L_l)$ は infinitesimally equivalent であり. よって

$$H_l \cong T_2(L_l) \qquad (\ l \geq g\ )$$

Remark, $\frac{g}{2} < l < g$ に対する H_l は, holomorphic section の空間として得られるのかどうか、今のところわからない.

§2, Flensted-Jensen の仕事

最近次の定理が証明された.

Theorem [F-Jensen [14]]

G/H をアフィン対称空間とする時, $L^2(G/H)$ に点スペ

クトルが存在する為の一つの十分条件は，G/Hの compact Cartan subalgebra が存在すること，である．

Jensen 氏は，この条件が必要条件でもあろうと予想しているが，まだ証明されていない．以下，「G/H の compact Cartan subalgebra」の意味を述べる．

$\mathfrak{h} = \{ X \in \mathfrak{g} \ ; \ \sigma X = X \}$

$\mathfrak{q} = \{ X \in \mathfrak{g} \ ; \ \sigma X = -X \}$

とおくと，$\mathfrak{h}$ は H の Lie algebra であり，$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ である．以下の命題と，定義については，[15]～[19]。

Proposition,

$\exists \theta$; $\mathfrak{g}$ の Cartan involution

s.t. $\theta \circ \sigma = \sigma \circ \theta$

Definition

$\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}$ が Cartan subalg of G/H

$\Longleftrightarrow$ (1) $\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}} \subset \mathfrak{q}$

(2) $\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}$ は $\mathfrak{q}$ 内で maximal abelian subalgebra

(3) $H \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{q}} \Rightarrow \mathrm{ad}\, H \ ; \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, semi-simple

Definition

$\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}$ が compact Cartan subalgebra of G/H

$\Longleftrightarrow$ (1) $\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}$ は Cartan subalgebra of G/H

(2) $\exists\theta$: Cartan involution of $\mathfrak{g}$

s.t. $\sigma\cdot\theta=\theta\cdot\sigma$, $\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}\subset\mathfrak{k}$

§3. このセクションでは、G/H に compact Cartan subalg $\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}$ が存在するとして、$L^2(G/H)$ の点スペクトルを構成する。

θ を $\theta\cdot\sigma=\sigma\cdot\theta$, $\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}\subset\mathfrak{k}$ をみたす $\mathfrak{g}$ の Cartan involution とし、$\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra $\mathfrak{a}$ を、

- $\mathfrak{a}\supset\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}$
- $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{k}$ が maximal abelian in $\mathfrak{k}$
- $\sigma(\mathfrak{a})=\mathfrak{a}$. $\theta(\mathfrak{a})=\mathfrak{a}$

をみたすようにとる

Φ : $(\mathfrak{g}^c, \mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}^c)$ に関する root system.

Δ : $(\mathfrak{g}^c, \mathfrak{a}^c)$ に関する root system.

$$\Delta_0=\{\alpha|_{\mathfrak{a}^c\cap\mathfrak{k}^c}\ ;\ \circ\ \alpha\in\Delta\quad \circ\ \alpha|_{\mathfrak{a}^c\cap\mathfrak{k}^c}\neq 0 \quad \circ\ \alpha|_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}^c}\neq 0 \text{ 又は } \alpha|_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}^c}=0 \text{ で } X_\alpha+\theta X_\alpha\neq 0\}$$

$$\rho_0 = \frac{1}{2}\sum_{\beta\in\Delta_{0+}}\beta$$

$$M_{\mathfrak{a}_\mathfrak{g}} = \{ m \in H \ ; \ Ad(m)|_{\mathfrak{a}_\mathfrak{g}} = I \ \}$$

$$A_\mathfrak{g} = \exp \mathfrak{a}_\mathfrak{g}$$

$$\hat{A}_\mathfrak{g} = M_{\mathfrak{a}_\mathfrak{g}} A_\mathfrak{g}$$

$\bar{\mathfrak{n}} = \sum_{\lambda\in\Phi_+} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{-\lambda}$, $\bar{\mathfrak{n}}$ の analytic subgroup を $\bar{N}$,

$$\mathfrak{z}_\mathfrak{f}(\mathfrak{a}_\mathfrak{g}) = \{ X \in \mathfrak{f} \ ; \ [X \ \mathfrak{a}_\mathfrak{g}] = 0 \ \}$$

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{z}_\mathfrak{f}(\mathfrak{a}_\mathfrak{g})^{\mathbb{C}} + \mathfrak{a}_\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} + \bar{\mathfrak{n}}$$

とおき、$\mathfrak{b}$ を Lie alg とする $G^{\mathbb{C}}$ の analytic subgroup を B とすると、$B = M_{\mathfrak{a}_\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}} A_\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \bar{N}$ であり $G \cap B = \hat{A}_\mathfrak{g}$ が示し得る. よって $G/\hat{A}_\mathfrak{g} \hookrightarrow G^{\mathbb{C}}/B$ であるが. 更に $G/\hat{A}_\mathfrak{g}$ は $G^{\mathbb{C}}/B$ の open set である. よって特に $G/\hat{A}_\mathfrak{g}$ は complex manifold になる.

$\Lambda \in \mathfrak{a}_\mathfrak{g}^{\mathbb{C}*}$ を、$\Lambda(\mathfrak{a}_\mathfrak{g}) \subset i\mathbb{R}$, で.

$$H \in \mathfrak{a}_\mathfrak{g} \ . \ \exp H \in H \ \Rightarrow \ \Lambda(H) \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

をみたすものとし.

$$\xi : \hat{A}_\mathfrak{g} = M_{\mathfrak{a}_\mathfrak{g}} A_\mathfrak{g} \ni m\cdot\exp H \mapsto e^{\Lambda(H)} \in U(1)$$

$$\xi^{\mathbb{C}} ; B = M_{\mathfrak{a}_\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}} A_\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \bar{N} \ni m\cdot\exp H\cdot n \longmapsto e^{\Lambda(H)} \in \mathbb{C}^*$$

$L_\xi = G \times_\xi \mathbb{C}$, $L_\xi^{\mathbb{C}} = G^{\mathbb{C}} \times_{\xi^{\mathbb{C}}} \mathbb{C}$

とおくと，$L_{\xi}^{\mathbb{C}}\big|_{G/\hat{A}_{\mathfrak{q}}} = L_{\xi}$．特に$L_{\xi}$は holomorphic line bundle over $G/\hat{A}_{\mathfrak{q}}$ である．

$\Gamma_2(L_{\xi}) = \{ f \ ;\ L_{\xi}$ の holomorphic L^2-section$\}$
とおき．$g \in G$，$f \in \Gamma_2(L_{\xi})$，$x \in G/\hat{A}_{\mathfrak{q}}$ に対して
$\hat{\pi}_{\xi}(g) f(x) = f(g^{-1}x)$ とおくと，Gのユニタリ表現
$(\hat{\pi}_{\xi}, \Gamma_2(L_{\xi}))$ を得る．

Theorem 1.

$\Gamma_2(L_{\xi}) \neq 0 \Rightarrow \hat{\pi}_{\xi}$; 既約．

Theorem 2.

$\Gamma_2(L_{\xi}) \neq 0 \iff$

(1) 各$\lambda \in \Phi$に対して

$\mathfrak{g}_{\lambda}^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ 又は $\mathfrak{g}_{\lambda}^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$

(2)
$$\begin{cases} \Lambda(H_{\alpha}) \geq 0, & \forall \alpha \in \Delta_+ \ ;\ \alpha|_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}^{\mathbb{C}}} \neq 0,\ X_{\alpha} \in \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \\ \Lambda(H_{\beta}) + \rho_0(H_{\beta}) < 0 & \forall \beta \in \Delta_+ \ ;\ \beta|_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}^{\mathbb{C}}} \neq 0 \\ & \qquad X_{\beta} \in \mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \end{cases}$$

Theorem 3.

$\Gamma_2(L_{\xi}) \neq 0 \Rightarrow \hat{\pi}_{\xi}$ は $L^2(G/H)$ の点スペクトル

これらの定理の証明は，近く論文として出すので，それを

参照されたい。

References.

[1] J. Faraut, Noyaux sphériques sur un hyperboloide a une nappe, Lecture Notes in Math. 497, Springer, Berlin, 1973.

[2] ———, Distributions spheriques sur les espaces hyperboliques,

[3] I. M. Gelfand, M. I. Graef and N. Ya. Vilenkin, Generalized functions, Vol 5.

[4] V. F. Molchanov, Harmonic analysys on a hyperboloid of one sheet, Soviet Math. Dokl. 7 (1966), 1533 ~ 1556

[5] ———, Analogue of the Plancherel formula for hyperboloid. Soviet Math. Dokl. 9 (1968), 1382 ~ 1385

[6] ———, Representations of pseudo-orthogonal group associated with a cone, Math. USSR Sbornik 10 (1970) 333-347.

[7] T. Shintani, On the decomposition of regular representation of the Lorentz group on a

hyperboloid of one sheet. Proc. Japan Acad. 43 (1967), 1-5

[8] R.S. Strichartz. Harmonic analysis on hyperboloids, J. Functional Analysis 12 (1973) 341-383

[9] W. Rossmann, Analysis on Real Hyperbolic Spaces, J. Functional Analysis 30 (1978) 448 - 477,

[10] S. Matsumoto. The Plancherel formula for a pseudo-riemannian symmetric space, Hiroshima Math. J. 8 (1978) 181-193

[11] P.D. Méthée, Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz. Commentarii Mathematici Helvetici 28 (1954) 225-269

[12] Kenji Hiraoka, S. Matsumoto ank K. Okamoto, Eigenfunctions of the Laplacian on a Real Hyperboloid of one Sheet. Hiroshima Math. J. 7 (1977) 855-864

[13] S. Matsumoto. Discrete series for affine

symmetric spaces. to appear
[14] M. Flensted-Jensen, Discrete Series for semi-simple symmetric space
[15] T. Matsuki, The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups.
[16] T. Oshima and T. Matsuki, Orbit on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroups.
[17] O. Loos, Symmetric spaces I, II, Benjamin. New York 1969
[18] M. Berger, Les espace symétriques non compacts. Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup. 74 (1957) 85-177
[19] J. A. Wolf, The action of a real semi-simple group on a complex flag manifold I, Bull. Amer. Math Soc 75 (1969) 1121-1237